



МЕЛЬНИК Всеволод Михайлович,

канд. фіз.-мат. наук, доцент,

Національний транспортний університет,

ORCID ID: 0009-0005-0588-7645

СОЛОВЬОВ Ігор Леонідович,

канд. техн. наук, доцент,

Національний транспортний університет,

ORCID ID: 0000-0001-5203-4139

ХУДОЛІЙ Сергій Миколайович,

канд. техн. наук, доцент,

Національний транспортний університет,

ORCID ID: 0000-0001-6054-6708

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Робота присвячена теоретичному дослідженню напружено-деформованого стану конічних оболонок змінної товщини при нестационарних навантаженнях, рис. 1.

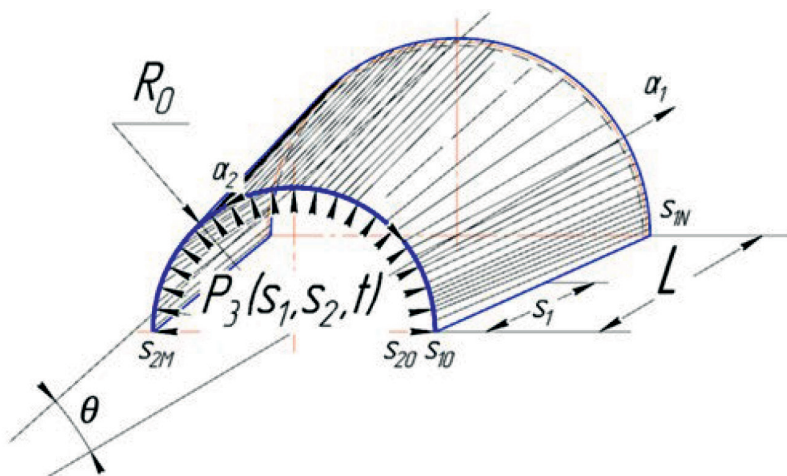


Рис. 1. Конічна оболонка змінної товщини

Вивчення напружено-деформівного стану елементів конструкцій, які зазнають інтенсивних імпульсних впливів, є сьогодні однією з актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла¹.

Конструктивне неоднорідні циліндричні оболонки мають високу несучу здатність, легкість, порівняно прості для виготовлення і тому економічно ефективні. Завдяки цим якостям вони знаходять широке практичне застосування в багатьох галузях сучасної техніки і машинобудування, будівництві, авіації і ракетобудуванні, кораблебудуванні і т. д.

Для опису динамічного процесу використовувалися класичні рівняння руху оболонок. А з точки зору дослідження хвильових процесів при короткочасних навантаженнях, коли час тривалості навантаження менше часу пробігу пружної хвилі характерного розміру конструкції, одним із суттєвих питань застосування являється гіперболічність вихідних рівнянь. Цим вимогам задовольняють рівняння руху оболонок типу Тимошенка². Тому практичний інтерес становлять розглядання задач динаміки оболонок змінної товщини при нестационарних навантаженнях.

В основу розробленого методу теоретичного дослідження динаміки коливання конічних оболонок змінної жорсткості при нестационарних навантаженнях покладено геометрично і фізично лінійні моделі оболонок типу Тимошенка. Основою розробленої чисельної методики дослідження нестационарних коливань є застосування інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам і явній апроксимації по часовій координаті³.

Наукове значення досліджень полягає в створенні загального підходу до розв'язання нових задач про нестационарні коливання конічних оболонок змінної жорсткості, які мають значний теоретичний інтерес і широке застосування в практичних задачах.

В даній роботі розглядаються рівняння осесиметричних коливань конічних оболонок змінної товщини при нестационарних навантаженнях. Покладалося, що напружено-деформований стан конічної оболонки може

1 Мейш В. Ф., Мейш Ю. А., Мельник В. М. Чисельне моделювання динамічної поведінки конічної оболонки змінної товщини при дії розподіленого імпульсного навантаження. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць. Дніпропетровськ: Ліра, 2014. Вип. 22. С. 169–181.

2 Timoshenko S.P., *Vibration Problems in Engineering.* / Timoshenko S.P., Young D.X., Weaver Jr. New-York : John Wiley and Sons, 1974. 472 p.

3 Golovko K. G. Solution of Axisymmetric Dynamic Problems for Cylindrical Shells on an Elastic Foundation / Golovko K. G., Lugovoi P. Z., and Meish V. F. *Int. Appl. Mech.* 2007. 43, 12. P. 1390–1395.

бути визначений в рамках геометричної та фізично лінійної теорії оболонок типу Тимошенка.

Припускається, що конічна оболонка змінної товщини знаходиться під дією внутрішнього розподіленого навантаження $P_3 = P_1(s_1, t)$ при осесиметричних коливаннях і $P_3 = P_3(s_1, s_2, t)$ для неосесиметричних коливань,

де

$s_1 = A_1 a_1$, $s_2 = A_2 a_2$ і t – просторові та часова координати;

A_1, A_2, a_1, a_2 – відповідно коефіцієнти першої квадратичної форми та криволінійні координати серединної поверхні оболонки.

При розгляді конічних оболонок використовується система координат a_1, a_2, t , причому координата a_1 відраховується від краю оболонки.

Коефіцієнти першої квадратичної форми та кривизни координатної поверхні записуються наступним чином:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R_s, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \cos \theta / R_s, \quad (1)$$

де θ – кут конусності; $R_s = R_0 + s_1 \sin \theta$, R_0 – радіус оболонки при $s_1 = s_{10}$.

Припускається, що товщина оболонки змінюється вздовж координати s_1 , тобто $h = h(s_1)$.

Для обчислення характеристик жорсткості оболонки товщина h визначається як лінійна функція координати s_1 :

$$h(s_1) = h(s_{10}) + [h(s_{1N}) - h(s_{10})] \frac{s_1 - s_{10}}{L}, \quad (2)$$

$$s_{1N} - s_{10} = L, \quad s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}.$$

Для виведення рівнянь коливань вказаної моделі оболонки використовується варіаційний принцип Рейснера для динамічних процесів:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R - T) - \delta A] dt = 0, \quad (3)$$

де R – функціонал Рейснера, T – кінетична енергія, A – робота зовнішніх сил.

Рівняння коливань конічної оболонки змінної товщини записуються у вигляді⁴:

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} T_{22} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 S) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} S + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} = \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (4)$$

4 Meish, V. F., Galagan, O. G., Mel'Nik, V. M. (2014). Nonaxisymmetric vibrations of conical shells of variable thickness under a nonstationary load. *International Applied Mechanics*. 50(3), pp. 295–302.

$$\begin{aligned} \frac{10}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 &= \rho h(s_1) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} M_{22} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \rho \frac{h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 H) + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} H + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} &= \rho \frac{h^3(s_1)}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Зв'язок величин зусилля – моменти з відповідними величинами деформацій у випадку ізотропного матеріалу оболонки мають вигляд:

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(s_1)\varepsilon_{11} + B_{12}(s_1)\varepsilon_{22}, \quad T_{22} = B_{21}(s_1)\varepsilon_{11} + B_{22}(s_1)\varepsilon_{22}, \\ T_{13} &= B_{13}(s_1)\varepsilon_{13}, \quad T_{23} = B_{23}(s_1)\varepsilon_{23}, \quad M_{11} = D_{11}(s_1)k_{11} + D_{12}(s_1)k_{12}, \\ M_{22} &= D_{21}(s_1)k_{11} + D_{22}(s_1)k_{22}, \quad S = B_s(s_1)\varepsilon_{12}, \quad H = D_s(s_1)k_{12}, \end{aligned} \quad (5)$$

де,

$$\begin{aligned} B_{11}(s_1) &= \frac{Eh(s_1)}{1 - \mu^2}, \quad B_{12}(s_1) = \frac{Eh(s_1)\mu}{1 - \mu^2}, \\ B_{22}(s_1) &= \frac{Eh(s_1)}{1 - \mu^2}, \quad B_{21}(s_1) = \frac{Eh(s_1)\mu}{1 - \mu^2}, \quad B_s(s_1) = Gh(s_1), \\ B_{13}(s_1) &= Gh(s_1), \quad B_{23}(s_1) = Gh(s_1), \\ D_{11}(s_1) &= \frac{Eh^3(s_1)}{12(1 - \mu^2)}, \quad D_{12}(s_1) = \frac{Eh^3(s_1)\mu}{12(1 - \mu^2)}, \\ D_{22}(s_1) &= \frac{Eh^3(s_1)}{12(1 - \mu^2)}, \quad D_{21}(s_1) = \frac{Eh^3(s_1)\mu}{12(1 - \mu^2)}, \\ D_s(s_1) &= G \frac{h^3(s_1)}{12}. \end{aligned} \quad (6)$$

$B_{11}, B_{22}, B_{13}, D_{11}, D_{22}$ – тангенційна та згинна жорсткості;

E, G, μ – механічні параметри матеріалу оболонки.

Деформаційні співвідношення у випадку конічної оболонки змінної товщини мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} u_2, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} u_1 + k_2 u_3, \\ \varepsilon_{13} &= \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$k_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad k_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} \varphi_1,$$

$$k_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} - \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{ds_1} \varphi_2.$$

Рівняння коливань конічної оболонки змінної товщини доповнюються відповідними граничними умовами по координаті s_1 .

У випадку вільного краю, при $s_1 = s_{10}$ і $s_1 = s_N$:

$$T_{11} = 0, \quad T_{13} = 0, \quad M_{11} = 0, \quad S = 0, \quad H = 0 \quad (8)$$

У випадку жорсткого защемлених країв, при

$$s_1 = s_{10} \text{ і } s_1 = s_{1N},$$

$$\bar{U}(s_{10}, s_2) = \bar{U}(s_{1N}, s_2) = 0, \quad (9)$$

де

$$\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2).$$

Початкові умови при $t = 0$ покладалися:

$$u_1 = u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Метою даного дослідження є методика розв'язку задач для дослідження осесиметричних коливань конічних оболонок змінної товщини при нестационарних навантаженнях. Чисельний алгоритм розв'язання початково – крайової задачі, засновано на використанні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовій координаті явній апроксимації по часовій координаті t^5 .

Практична збіжність чисельних алгоритмів.

Питання практичної збіжності чисельних алгоритмів відпрацьовані на задачі динамічної поведінки конічної оболонки постійної товщини з жорстко закріпленими краями під дією імпульсного навантаження.

Імпульсне рівномірно розподілене поверхневе навантаження задавалося у вигляді:

$$P_3 = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \quad (11)$$

5 Мейш В. Ф. Осесимметричные колебания конических оболочек переменной толщины при действии нестационарной нагрузки/ В. Ф. Мейш, В. М. Мельник. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Дніпропетровський національний університет. 2012. Вип.18. С. 132–139.

де

$$T = 0.625 L/c,$$

$$A = 10^6 \text{ Н/м}^2,$$

$$c^2 = E/[\rho(1 - \mu^2)],$$

$$t = 7.5T,$$

A – амплітуда навантаження, T – тривалість навантаження.

Геометричні параметри оболонки:

$$L = 0,8 \text{ м}; h = 2 \times 10^{-2} \text{ м}; R_0 = 0,2 \text{ м}; \theta = \pi/12$$

Практична збіжність досліджувалася на величинах $\max U_3$ і $\max \sigma_{22}$ в перший період коливань цих величин в точках $s_1 = L/2$.

Розрахунки проведені для випадків $n = 20, n = 40, n = 80, n = 160, n = 320$. Як видно з результатів в табл. 1, придатна точність досягається при $n = 160$.

Таблиця 1.

Придатна точність для розрахунків

	$u_3 \times 10^{-4}, \text{ м}$	$\sigma_{22} \times 10^8, \text{ Па}$
$N = 20$	0,850	0,142
$N = 40$	0,879	0,146
$N = 80$	0,885	0,147
$N = 160$	0,886	0,147
$N = 320$	0,886	0,147

В роботі розроблено ефективний підхід до розв'язання двовимірних задач вимушених коливань конічних оболонок змінної товщини при нестационарних навантаженнях при різних граничних умовах, що базується на використанні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам та явній апроксимації по часовій координаті. Проведено аналіз впливу форми оболонки, законів зміни товщини, виду граничних умов, в результаті чого виявлено ряд закономірностей розподілу полів переміщень і напружень, що мають практичне значення при оцінці міцності і надійності елементів конструкцій.

При цьому отримано такі конкретні результати:

- на основі співвідношень уточненої теорії оболонок виведено розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами відносно переміщень, що описує напружено-деформований стан конічних оболонок змінної товщини;

- розроблено методику розрахунку конічних оболонок змінної товщини при дії розподіленого імпульсного навантаження, що полягає у використанні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевих співвідношень по просторовим координатам та явній апроксимації по часовій координаті;
- запропонований підхід реалізовано в обчислювальному комплексі для сучасних ПК, за допомогою якого можна проводити розрахунки багатоваріантних задач даного класу при різних видах навантаження, закріплення країв, геометричних характеристик оболонок;
- достовірність результатів, що одержані в роботі, забезпечено використанням обґрунтованої математичної моделі теорії оболонок, коректністю формулювання задачі і контролем точності розрахунку;
- на основі запропонованого підходу одержано розв’язки ряду задач і проведено аналіз напруженого стану конічних оболонок змінної товщини при різних умовах закріплення країв;
- розроблений на базі запропонованого підходу алгоритм, обчислювальний комплекс для ПК і отримані в роботі результати можуть бути використані в науково-дослідних організаціях для оцінки міцності і надійності елементів конструкцій, що мають форму конічних оболонок змінної товщини.

DOI: 10.51587/9798-9895-14649-2024-118-114-120